ノートA　行列とその働き

本文中ではいろいろなところで線形代数の知識を使いました。線形代数の主役である行列については特に説明せずに使っていましたので，ここで簡単に行列の定義・役割・性質についてまとめておこうと思います。

行列の定義と働き

数を縦横長方形（正方形でもよい）に並べてカッコで括ったものを**行列**と言います。たとえば

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

といったようなものです。行列において横の並びを行，縦の並びを列と呼びます。

$$\begin{array}{r} \text{第1行} \\ \text{第2行} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\text{第1列}\ \ \text{第2列}\ \ \text{第3列}$$

行と列を持つから「行列」という名称がつけられているので，普通の意味の行列（1列に並んでいる状態）とは別物であることに注意して下さい。

行列には，ベクトルを変換する働きをするものという意味

があります。ベクトルというのは向きと長さを併せ持つ数学的対象で，矢印で表されます。たとえば物理で力というのは大きさとその働く向きを持っていますから，大きさの方を長さで表すことで力はベクトルで表されます。ベクトルを表す矢印の始点（矢の付いていない方）を座標平面の原点に持ってくると，矢印はその終点（矢の付いている方）の座標によって表すことができます。この座標によってベクトルを表した結果を数ベクトルと言います。

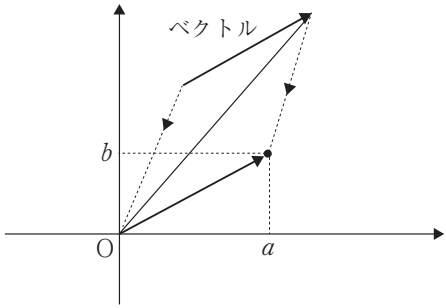


図 A.1　ベクトル——矢印と数ベクトル

ふつう，数ベクトルは横ベクトル（数を横に並べてカッコで括ったもの）で表されますが，線形代数ではよく縦ベクトル（数を縦に並べてカッコで括ったもの）が使われます。

$$\text{横ベクトル：}(1, 2, 3)\quad \text{縦ベクトル：}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

以下ではベクトルといえば数ベクトルを指し，ベクトルは

主に縦ベクトルとして表します。平面ベクトルは2個の数が並んだもの，空間ベクトルは3個の数が並んだものになりますが，個数にこだわらず，いくつかの数が縦に並んだものをどれもベクトルとして扱います。n 個の数が並んだベクトルを n ベクトルと言うことにします。

さてベクトルに対する行列の働きですが，行列 A の行の個数を m，列の個数を n としましょう。（このとき A は $m\times n$ 行列と呼ばれます。）この行列 A は，n ベクトルを m ベクトルに変換する働きをします。例で説明しましょう。2×3 行列が3ベクトルを2ベクトルに変換する仕方は，次の通りです。

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by+cz \\ dx+ey+fz \end{pmatrix}$$

行列の方は2つの行の集まりと思い，その各行とベクトルとの内積が結果として得られるベクトルの成分になる，ということですね。ここで内積と呼んだのは，長さの同じ2つのベクトル $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ に対して，同じ位置にある成分同士の積の和，つまり $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$ のことです。

行列によってベクトルは第2のベクトルに写されますが，その第2のベクトルをさらに第2の行列で変換して，第3のベクトルを得ることができます。すなわち

$$\vec{u} \xrightarrow{A} \vec{v} \xrightarrow{B} \vec{w}$$

この操作で結局 $\vec{u}$ が $\vec{w}$ に写されたのですが，これを直接 1 つの行列による変換で表したい，と考えます。式で考えてみると

$$\vec{w} = B\vec{v} = B(A\vec{u})$$

ということだから，

$$\vec{w} = C\vec{u}$$

となるような行列 C はないだろうか？　という問題です。もしそのような行列 C があれば

$$C\vec{u} = B(A\vec{u})$$

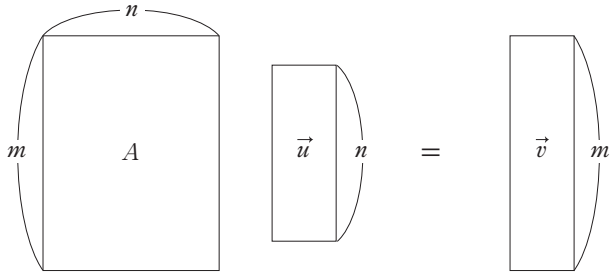
となるわけですから，

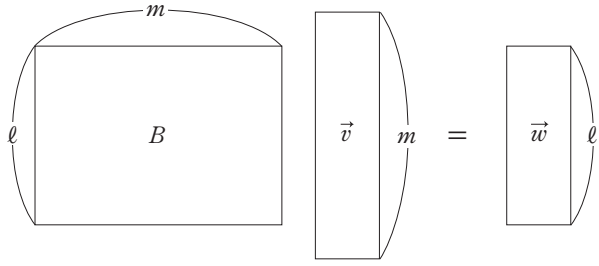
$$C = BA$$

と書くべきでしょう。つまり変換の合成に対応するように，行列と行列の積を定義したい，ということです。

まずサイズを考えてみます。行列 A を $m\times n$ 行列，ベクトル $\vec{u}$ を n ベクトルとすると，$\vec{v}=A\vec{u}$ は m ベクトルです。したがって $\vec{v}$ を変換する行列 B は，$\square\times m$ というサイズになっていなければなりません。そこで B を $\ell\times m$ 行列としましょう。すると B により $\vec{v}$ は ℓ ベクトルに変換されます。というわけで $\vec{w}$ は ℓ ベクトルです。

このことから，$C=BA$ は n ベクトルを ℓ ベクトルに変換する行列として，$\ell\times n$ 行列でなければならないことになります。行列 $C=BA$ の作り方は次のようにすればよいことが





わかります。C の第 i 行，第 j 列のところにある成分は，左側にある行列 B の第 i 行と，右側にある行列 A の第 j 列（いずれも長さが m のベクトルになっています）の内積とするのです。これも一般的には示さずに，例で見てみます。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

としてみましょう。A, B ともに 2×2 行列の場合です。$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して，

$$A\vec{u} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$$

となるので，$A\vec{u} = \vec{v}$ とおくと

$$B\vec{v} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}(a_{11}x + a_{12}y) + b_{12}(a_{21}x + a_{22}y) \\ b_{21}(a_{11}x + a_{12}y) + b_{22}(a_{21}x + a_{22}y) \end{pmatrix}$$

となります。この最後の結果 $\vec{w}$ を，x, y に関して整理してみます。すると

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})x + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})y \\ (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})x + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})y \end{pmatrix}$$

となりますね。これを行列がベクトルを変換するということの定義に当てはめると，

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と書けるので，この右辺に現れた行列が積 BA ということになります。すなわち

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}$$

となることがわかりました。

行列がベクトルを変換する働きについては，数の掛け算を思い起こすとよく理解できます。数 a には，掛けることで相手を a 倍するという働きがある，というふうに（大袈裟ですが）思いましょう。a によって x は ax に変換され，さらに b を掛けると $b(ax)$ になりますが，これは ba によって x を変換した結果と同じです。式で表すと

$$b(ax) = (ba)x$$

ということです。行列の積の考え方はこれと同じですね。ただし数の積と行列の積では大きな違いがあります。数の積では $ab=ba$ でしたから，どちらの数が左に来ても結果は変わりません。しかしたとえば 2×2 行列 2 つの積について見ても，

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

となって，よく見るとすぐ上で計算した結果と違っています。これはごく自然なことで，2 つの変換を続けて行うとき，結果はその順序によって違うのが一般的です。たとえば，水をこぼしてからテーブルを拭くのと，テーブルを拭いてから水をこぼすのでは，結果は全然違います。そう考えると，結果が積の順序によらないという数の方が，例外的な性質を持っているということになります。

もう少し数について考えていきましょう。たとえば $a=2$ として，x に 2 が働いた結果 3 になった，という状況を考えます。

$$2x = 3$$

このときの x は

$$x = \frac{3}{2}$$

と求められますが，この操作は，両辺に $\frac{1}{2}$ を掛けることで実現されました。$\frac{1}{2}$ という数は 2 の逆数で，

$$\frac{1}{2} \times 2 = 1$$

という性質で定まります。つまり

$$2x = 3$$

$$\frac{1}{2} \times 2x = \frac{1}{2} \times 3$$

$$1x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

というプロセスで x が求められた，と見ることができます。中学校で習うようなことをくどくどと述べてきましたが，ここに現れた $\frac{1}{2}$ と 1 というのがポイントです。まず 1 というのは，（掛けるという操作において）相手を変化させない，という働きがあります。（何も働かないという働き，とも言えますね。）そして $\frac{1}{2}$ の方は，2 という働きに続けて行うことで，

合成した働きが1になる，つまり何も変化させないことにする，という働きを持ちます。言い換えると，2の引き起こした効果を打ち消す働きをするわけです。その結果，x がこれこれである（$x=\square$），という表示を得ることができました。

この話を行列の場合に当てはめたいのですが，そのために正方形の形をした行列を考えることにします。簡単のため，2×2 行列で考えます。まず，数における1に相当する行列を求めましょう。つまり，相手（ベクトル）を変化させないという働きをする 2×2 行列は何か，ということです。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成り立つように a, b, c, d を決めるという問題ですから，$a=1, b=0, c=0, d=1$ が答えになります。つまり

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が変化させないという働きをする行列ということになります。この行列を**単位行列**と呼び，記号 I で表します。次に行列 A に対して，その働きを打ち消す逆数の働きをするものは何か，という問題を考えます。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

とおいて，X が A の働きを打ち消す，すなわち

$$XA = I$$

が成り立つようにしたいと思います。すると

$$\begin{cases} ax+cy = 1 \\ bx+dy = 0 \\ az+cw = 0 \\ bz+dw = 1 \end{cases}$$

を解くことになります。少し計算してみましょう。最初の2式から

$$(ad-bc)x = d,\ (bc-ad)y = b$$

が得られ，あとの2式から

$$(ad-bc)z = -c,\ (bc-ad)w = -a$$

が得られます。これを見ると，$ad-bc \neq 0$ であれば x, y, z, w が一意的に決まることがわかります。$ad-bc=0$ とすると，x, y, z, w が何であっても $a=b=c=d=0$ が得られ，このときたとえば $ax+cy=1$ は成り立ちませんので，解は存在しないということになります。したがって結論として，行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，$ad-bc \neq 0$ のときに限って逆数に相当する**逆行列**が存在します。A の逆行列は A^{-1} という記号で表され，

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

によって与えられます。数の場合も 0 には逆数がありませんので，逆行列が存在するために何らかの条件が課されるのは自然なことでしょう。ここに現れた $ad-bc$ という量は非常に重要なもので，行列 A の**行列式**と呼ばれ，$|A|$ という記号で表されます。一般の $n\times n$ 行列 A についても行列式 $|A|$ が定義され，ある数となります。その定義には立ち入りません。$|A|\neq 0$ のとき A の逆行列 A^{-1} が存在し，

$$A^{-1}A=AA^{-1}=I$$

となります。ただしここで I は $n\times n$ のサイズの単位行列で，

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

により定義されます。サイズを明記したいときは，I_n のように書きます。

数との類推に戻ると，$2x=3$ という方程式は，2 の逆数 $\frac{1}{2}$ を用いて解くことができました。対応して行列の話にすると，逆行列を使うと連立 1 次方程式が解けます。次の連立 1 次方程式を考えましょう。

$$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$$

これは行列とベクトルを使うと，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

と表されます。左辺の行列を A とおきましょう。もし A の行列式 $|A|=ad-bc$ が 0 でなければ，A には逆行列 A^{-1} が存在するので，両辺に左から A^{-1} を掛けると

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$I\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

となって，連立 1 次方程式の未知数 x, y が求められます。

固有値・固有ベクトル

行列と数はこのようによく似た働きをし，また違いもあります。行列と数を同時に考えるときには，数のことをスカラーと呼ぶのが線形代数の流儀です。さて行列とスカラーの働きを比べると，もちろんスカラーの方がずっと簡単です。だから，もし行列がスカラーの働きをするなら，その働きはず

いぶん調べやすくなるでしょう。行列とスカラーは違うので，全く同じ働きをすることは期待できませんが，状況をうまく限るとスカラーの働きと見なすことが可能になります。これが行列の最も深い性質である，固有値・固有ベクトルの考え方です。

ここでも簡単のため 2×2 行列で説明しますが，同様のことが $n\times n$ 行列でも成り立ちます。2×2 行列 A に対して，スカラー α と $\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ とは異なるベクトル $\vec{v}$ があって，

(EV)　$$A\vec{v}=\alpha\vec{v}$$

が成り立つとしましょう。このとき α を A の**固有値**と呼び，$\vec{v}$ のことを A の固有値 α に対する**固有ベクトル**と呼びます。つまりある特定のベクトル $\vec{v}$ に限るのではありますが，A の働きがスカラー倍と同じになる，という状況です。（ここで $\vec{v}\neq\vec{0}$ という条件は重要です。というのは，もし $\vec{v}=\vec{0}$ であれば，どのような A とどのような α に対しても $A\vec{v}=\alpha\vec{v}$ が成り立ってしまい，意味のある情報が得られないからです。）

このように定義される固有値・固有ベクトルというのは存在するでしょうか？　存在するとしたらどれくらいあるでしょうか？　この問には，行列式を用いて解答することができます。ここで念のため，行列の和とスカラー倍を定義しておきます。2 つの行列

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$$

に対して，その和 $A+B$ を

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

で定義し，またスカラー c に対しては A の c 倍 cA を

$$cA=\begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{pmatrix}$$

で定義します。（スカラー倍については，既に逆行列の表示のところで使っていました。）さて固有値・固有ベクトルの定義（EV）を，いま定めた和とスカラー倍を使って書き換えます。

$$\begin{aligned} A\vec{v} &= \alpha\vec{v} \\ A\vec{v}-\alpha\vec{v} &= \vec{0} \\ A\vec{v}-\alpha I\vec{v} &= \vec{0} \\ (A-\alpha I)\vec{v} &= \vec{0} \end{aligned}$$

となります。さてもし左辺の行列 $A-\alpha I$ に逆行列 B が存在したとすると，最後の式の両辺に左から B を掛けることで

$$\vec{v}=B\vec{0}=\vec{0}$$

が得られてしまいます。これは $\vec{v}$ は $\vec{0}$ とは異なるという定義に反するので，さかのぼって考えれば $A-\alpha I$ には逆行列が存在してはいけない，ということになります。そのための条件は，この行列の行列式が 0 になることでした。すなわち

$$|A-\alpha I|=0$$

というのが，α が A の固有値であるための必要条件であることがわかったのです。ここで

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$|A-\alpha I|=\left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix} a-\alpha & b \\ c & d-\alpha \end{pmatrix}\right|$$

$$=(a-\alpha)(d-\alpha)-bc$$

ですから，α は 2 次方程式

$$\alpha^2-(a+d)\alpha+ad-bc=0$$

の解でなければならない，ということがわかります。逆に α がこの 2 次方程式の解になっているときには，$\vec{v}\neq\vec{0}$ で（EV）をみたすものが存在することが初等的に示せますので，この 2 次方程式が固有値 α を決定するものであることがわかります。この 2 次方程式のことを，行列 A の**固有方程式**と呼びます。したがって行列 A の固有値は，2 次方程式の解だから 2 個（固有方程式が重解を持つときは重解 1 つを 2 個と数えることにしましょう）あることがわかりました。

いくつか例を見てみましょう。

例 A. 1　$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$　この行列の固有値を求めましょう。

$A-\alpha I$ の行列式を計算すると，

$$|A-\alpha I| = (1-\alpha)(3-\alpha)-8 = \alpha^2-4\alpha-5 = (\alpha+1)(\alpha-5)$$

となりますので，これが 0 になる値として固有値 $\alpha=-1, 5$ が得られます。固有値 -1 に対する固有ベクトル $\vec{v}$ を求めましょう。$\vec{v}$ は $A\vec{v}=-\vec{v}$ を満たすような $\vec{0}$ ではないベクトルです。$\vec{v}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+2y \\ 4x+3y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となるので，これより $2x+2y=0, 4x+4y=0$，したがって $y=-x$ が得られます。このとき x の値は（0 でなければ）何でもよいので，たとえば $x=1$ とすると，固有値 -1 に対する固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ が得られました。同様の計算で，固有値 5 に対する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が取れることがわかります。

例 A.2　$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値を求めましょう。

$$|B-\alpha I| = (1-\alpha)(-1-\alpha)+6 = \alpha^2+5$$

となるので，これを 0 にする値として固有値 $\alpha=\pm\sqrt{5}\,i$ が得

られます。（i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ を表します。）
この場合の固有値は虚数となりました。

例 A.3　$C=\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値を求めましょう。

$$|C-\alpha I| = (6-\alpha)(-\alpha)+9 = \alpha^2-6\alpha+9 = (\alpha-3)^2$$

となりますので，固有値は 3（重解）です。

固有値・固有ベクトルはいろいろなところで役に立つのですが，簡単な応用を 1 つ紹介しましょう。A を $n\times n$ 行列とします。A の k 個の積を A^k で表します：

$$A^2 = AA, A^3 = AAA, \cdots, A^k = \overbrace{AA\cdots A}^{k}, \cdots$$

行列はベクトルを変換する働きをするものでしたので，A^2 とは A でベクトルを変換した後その結果をまた同じ行列 A で変換するという働き，というように，A で変換する働きを k 回繰り返すのが A^k の働きです。行列として A^k を計算するのは大変なのですが，固有ベクトルに対してはその働きが簡単にわかります。α を A の固有値，$\vec{v}$ を α に対する固有ベクトルとしましょう。このとき（EV）を繰り返し使うと，

$$A^2\vec{v} = A(A\vec{v}) = A(\alpha\vec{v}) = \alpha A\vec{v} = \alpha^2\vec{v}$$
$$A^3\vec{v} = A(A^2\vec{v}) = A(\alpha^2\vec{v}) = \alpha^2 A\vec{v} = \alpha^3\vec{v}$$

というように，一般に

$$A^k\vec{v} = \alpha^k\vec{v}$$

が得られます。こうして A^k という複雑な行列の働きが，固有ベクトルに対しては単に α^k を掛けるだけと簡潔に表されるのです。

ノートB　級数とその収束

ここでは級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の収束について基本的な事柄をまとめ，第7章のいくつかの主張に証明を与えます。

まず $\{a_n\}$ が実数からなる数列の場合を考えます。このとき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するとは，部分和

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

によって決まる数列 $\{S_n\}$ が収束すること，と定義します。

定理 B. 1　0以上の数からなる数列 $\{b_n\}$ があって，すべての n について $|a_n| \leqq b_n$ をみたし，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が収束しているなら，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ も収束する。

証明　級数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が収束しているので，その部分和

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

によって決まる数列 $\{T_n\}$ はコーシー列となる。すなわち，$m < n$ とすると，

$$|T_n - T_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} b_k \right| = \sum_{k=m+1}^{n} b_k \to 0 \quad (m, n \to \infty)$$

が成り立っている。すると，

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right|$$

$$\leqq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|$$

$$\leqq \sum_{k=m+1}^{n} b_k$$

$$= T_n - T_m \to 0 \quad (m, n \to \infty)$$

となるので $\{S_n\}$ もコーシー列となる。したがって級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する。□

次に $\{a_n\}$ が複素数からなる数列の場合を考えます。$a_n = x_n + iy_n$ とすると，

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} x_k + i\sum_{k=0}^{n} y_k$$

となるので，2つの級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

がともに収束するとき，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束すると定義します。つまり，

$$X_n = \sum_{k=0}^{n} x_k, \quad Y_n = \sum_{k=0}^{n} y_k$$

により決まる数列 $\{X_n\}, \{Y_n\}$ がともに収束するときに，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束するということです。

定理 B. 2　a_n を複素数とする。級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ が収束するならば，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する。

証明　複素数の絶対値の定義は，$z=x+iy$ とするとき

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

であった。したがって $|x|\leqq|z|, |y|\leqq|z|$ が成り立つ。よって $|x_n|\leqq|a_n|$ が成り立つので，定理 B.1 によって級数 $\sum_{n=0}^{\infty}x_n$ は収束する。同じく $|y_n|\leqq|a_n|$ も成り立つので，級数 $\sum_{n=0}^{\infty}y_n$ は収束する。□

第 7 章で

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

の収束について証明を与えていませんでしたが，いまの定理と第 5 章の例 5.1 を組み合わせると，この級数は任意の $z\in\mathbb{C}$ に対して収束することがわかります。

次に，やはり第 7 章の定理 7.1 の証明を与えましょう。定理 7.1 をあらためて述べてから証明します。

定理 7.1　ベキ級数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

がある z_0 について収束しているなら，$|z|<|z_0|$ となるすべての複素数 z について収束する。

証明　級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz_0{}^n$ が収束しているので，部分和

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k {z_0}^k$$

で決まる数列 $\{S_n\}$ は収束し，コーシー列となる。すると特に

$$|a_n {z_0}^n| = |S_n - S_{n-1}| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となるので，定数 $M>0$ を十分大きく取ると

$$|a_n {z_0}^n| \leqq M$$

がすべての n について成り立つようにできる。さて $|z|<|z_0|$ となる z を任意に取り，$|z|=r$ とおく。このとき

$$|a_n z^n| = |a_n| r^n \leqq \frac{M}{|z_0|^n} r^n = M\left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$$

が得られる。ここで $r/|z_0|<1$ なので，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} M\left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$ は収束する。したがって定理 B.1 により級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ は収束し，するとさらに定理 B.2 によって級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ も収束する。□

この証明において，数列 $\{a_n\}$ が複素数からなる場合でも，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束することを

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

で決まる複素数列 $\{S_n\}$ が収束すること（言い換えるとコーシー列になること）としています。本来の定義は $\{X_n\}, \{Y_n\}$

がともに収束することだったのですが，この２つの定義は同じことを言っているでしょうか？　これは簡単な練習問題ですので，皆さん考えてみて下さい。

ノートC　コーシーの積分公式

コーシーの積分定理（定理 7.2）を用いて，コーシーの積分公式（定理 7.4）を導きます。$f(z)$ が領域 D で正則で，$z \in D$ とするとき，D 内の閉曲線 C を z を内部に含んでかつ内部がすべて D の点からなるように取ります。このとき

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

という公式がコーシーの積分公式です。これを証明します。

z を中心とする半径 r の円 K を考えます。r は小さく取っておいて，この円 K が C の内部に含まれるようにします。C と K の間に橋となる曲線を渡して，この 2 つの曲線をつなぎます。そして図 C.1 右にあるように，C を辿り，橋を渡

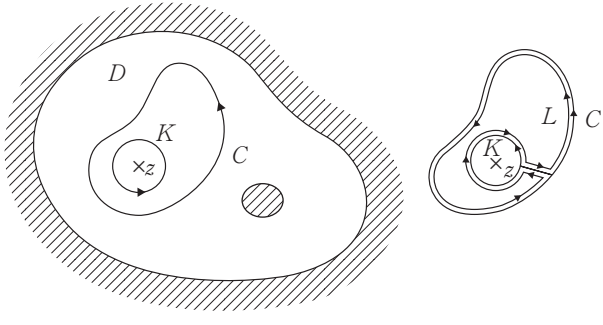


図 C.1　C と K

って K に至り，K を逆向きに辿って，また橋を渡って C に戻る，という閉曲線 L を考えます。

この閉曲線の内部においては

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$$

は ζ の関数として正則ですから，コーシーの積分定理によって

$$\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=0$$

が得られます。一方 L 上の積分においては，橋を C 側から K 側に渡って，その後 K 側から C 側へ渡るので，この 2 つの曲線上の積分は打ち消し合って 0 となります。残りは C を普通の向きに辿る部分と K を逆向きに辿る部分なので，L 上の積分が 0 ということから

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

が得られます。そこで右辺の積分を計算しましょう。

曲線上の積分についてはきちんと定義していませんでしたが，K 上の積分は次のようにして通常の積分に翻訳されます。K は

$$\zeta=z+re^{i\theta}\quad(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

と媒介変数表示されます。媒介変数 θ の意味は図 C.2 をご

覧下さい。

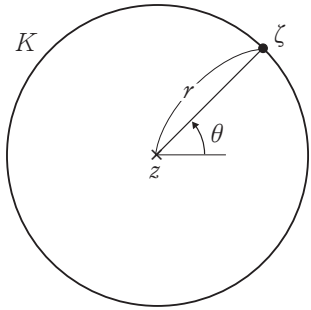


図 C.2　K の媒介変数表示

この媒介変数表示を用いて右辺の積分を書き換えると，

$$\int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{f(z+re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta}\, d\theta = i\int_0^{2\pi} f(z+re^{i\theta}) d\theta$$

となります。ここで，左辺の積分は C 上の積分に等しく，C は r に関係のない曲線でしたから，r がある程度小さければこの積分の値は r によらないことになります。ということは r をどんどん 0 に近づけても積分の値は変化しないということなので，$r \to 0$ の極限を取りましょう。

$$\lim_{r \to 0} i\int_0^{2\pi} f(z+re^{i\theta}) d\theta = i\int_0^{2\pi} f(z) d\theta = 2\pi i f(z)$$

となり，これが積分の値です。以上を全部つなげると，コーシーの積分公式が得られます。

ノートD　多変数関数の微分

第7章で流体力学の話をしたときに，合成関数の偏微分法の公式を使った議論をしましたので，その公式について簡単に説明しておきましょう。

まず1変数関数の微分についてあらためて考察します。関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとは，極限

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

が存在することで，この極限 $f'(a)$ にはグラフの接線の傾きという図形的な意味がありました。さてここで

$$\varepsilon=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)$$

とおくと，$x\to a$ という極限で $\varepsilon\to 0$ となります。この ε の定義式を書き換えて，

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\varepsilon(x-a)$$

としてみると，微分可能性の別のとらえ方ができるようになります。$f'(a)=A$ とおくと，右辺は $f(a)+A(x-a)$ という1次式と，$x\to a$ のとき $(x-a)$ の1次式よりも早く0に収束する誤差項 $\varepsilon(x-a)$ の和と見なせるので，微分可能とは1次式で近似できることである，ということができます。

この見方に基づいて，多変数関数の微分可能性を定義することができます。記号が煩雑になるのを避けるため，2 変数関数の場合に限って述べることにしましょう。2 変数関数 $f(x,y)$ が (a,b) において微分可能であるとは，$f(x,y)$ が

$$\text{(F)}\qquad \begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b)+A(x-a)+B(y-b) \\ &\quad +\varepsilon\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \end{aligned}$$

というように 1 次式で近似され，誤差項においては

$$\varepsilon \to 0 \quad (\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\to 0)$$

が成り立つ，とします。この表示で $y=b$ を代入して $x\to a$ の極限を考えると，

$$A = \partial_x f(a,b)$$

が得られ，$x=a$ を代入して $y\to b$ の極限を考えると

$$B = \partial_y f(a,b)$$

が得られます。

さて，$t=t_0$ で微分可能な 2 つの 1 変数関数 $x(t), y(t)$ があったとします。$x(t_0)=a, y(t_0)=b$ とおきましょう。そのほかに，(a,b) において微分可能な 2 変数関数 $f(x,y)$ があったとします。$f(x,y)$ の微分可能性の定義は上記の（F）の通りです。$x(t), y(t)$ の微分可能性の定義をあらためて書いておくと，

$$x(t) = x(t_0)+x'(t_0)(t-t_0)+\varepsilon_1(t-t_0)$$

$$y(t) = y(t_0)+y'(t_0)(t-t_0)+\varepsilon_2(t-t_0)$$

となり，ここで

$$\varepsilon_1 \to 0,\ \ \varepsilon_2 \to 0 \quad (t \to t_0)$$

です。さてこれらの関数を合成した $f(x(t), y(t))$ を考えます。3つの微分可能性の定義式を組み合わせると，$x(t_0)=a$, $y(t_0)=b$ に注意して

$$\begin{aligned}
&f(x(t), y(t)) \\
&\quad = f(a, b)+A(x(t)-a)+B(y(t)-b) \\
&\qquad +\varepsilon\sqrt{(x(t)-a)^2+(y(t)-b)^2} \\
&\quad = f(a, b)+A\{x'(t_0)(t-t_0)+\varepsilon_1(t-t_0)\} \\
&\qquad +B\{y'(t_0)(t-t_0)+\varepsilon_2(t-t_0)\} \\
&+\varepsilon\sqrt{\{x'(t_0)(t-t_0)+\varepsilon_1(t-t_0)\}^2+\{y'(t_0)(t-t_0)+\varepsilon_2(t-t_0)\}^2} \\
&\quad = f(a, b)+(Ax'(t_0)+By'(t_0))(t-t_0) \\
&\qquad +\{\underline{A\varepsilon_1+B\varepsilon_2+\varepsilon\sqrt{(x'(t_0)+\varepsilon_1)^2+(y'(t_0)+\varepsilon_2)^2}}\}(t-t_0)
\end{aligned}$$

が得られます。下線を引いた部分は $t \to t_0$ のときに0に収束するので，$f(x(t), y(t))$ を t だけの1変数関数と見ると，この表示はその微分が

$$Ax'(t_0)+By'(t_0)$$

で与えられるということを述べています。ここで A, B はそれぞれ $\partial_x f(a, b), \partial_y f(a, b)$ でしたから，以上の結果をまとめると次の公式が得られます。（t_0 を t で置き換えます。）

合成関数の偏微分法

$$
\begin{aligned}
(f(x(t),y(t)))' = {} & \partial_x f(x(t),y(t))\cdot x'(t) \\
& +\partial_y f(x(t),y(t))\cdot y'(t)
\end{aligned}
$$